Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Criterios de evaluación (cada número hace referencia al criterio de evaluación que se considera)

1. Codificar informaciones procedentes de situaciones reales a través de matrices, realizar operaciones con éstas y saber interpretar los resultados obtenidos en el contexto que se trabaja.

1.1. Realizar operaciones combinadas con matrices.

Determina la dimensión de la matriz resultante de esta operación y, después, compruébalo efectuando las operaciones.

$$2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

1.2. Calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.

Hallar por el método de Gauss el rango de la siguiente matriz: (Sol: rango = 3)

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 3 & -12 & 6 & -3\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Hallar el rango mediante el método de Gauss: $\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 7\\ 8 & -3 & -2 & 14\\ 2 & 1 & -4 & 0\end{pmatrix}$ (Sol: rango = 2)

1.3. Calcular la matriz inversa de una matriz dada a partir de la definición o por el método de Gauss.

Halla, si es posible, la inversa de esta matriz: $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ aplicando la definición.

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Hallar la matriz inversa de: $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -4\\ 3 & 7 & -3\end{pmatrix}$

¿Para qué valores de x la matriz $B=\begin{pmatrix}3 & x & x\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$ no admite matriz inversa?

Solución: Para $x=0$ la matriz B no tiene inversa.

1.4. Resolver problemas algebraicos utilizando matrices, sus operaciones y propiedades. Ecuaciones matriciales sencillas.

Encontrar todas las matrices X cuadradas 2x2 que satisfagan la igualdad

$XA=AX$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $AX=B$ con $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}$

b) $XA+B=C$ con $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Calcule la matriz X solución de la ecuación: $2X+\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

Sol: $X=\begin{pmatrix}\frac{13}{2} & \frac{-11}{2}\\ \frac{13}{2} & 6\end{pmatrix}$.

2. Plantear y resolver problemas, con enunciados de la economía y de las ciencias sociales, mediante sistemas de ecuaciones lineales de dos o tres incógnitas.

2.1 Discutir un sistema lineal por el Teorema de Rouché.

Discute este sistema en función de los valores de m.

$$\begin{cases}-x+y-z=-1\\ 4x-2y+2z=2m\\ -3x-2y+mz=-4\end{cases}$$

(Solución: si $m\neq 2 \Rightarrow$ SCD, si m=2 $\Rightarrow$ SI)

Discute el sistema según los valores de a: $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+3y-z=0 \end{cases}$.

2.2 Resolver un sistema lineal por el método de Gauss.

Discute y resuelve (si son compatibles) los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$a)\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ x-y+2z=-3 \\ 3x-2y+z=-2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x-2y=3 \\ x+2y=4 \\ 3x+y=0 \end{cases}$$

Escribe mediante ecuaciones este sistema, y resuélvelo aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (Solución: $x=y=z=1$)

Obtén todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x-y+z=0 \\ -2x+7y+z=-4 \end{cases}$$

(Solución: SCI, infinitas soluciones $x=1+2\lambda, y=\lambda, z=-2-3\lambda, \lambda \in \Re$)

2.3 Plantear y resolver problemas que den lugar a sistemas de ecuaciones lineales

Los 176 niños de una población rural están distribuidos en tres colegios: *A*, *B* y *C*. Los matriculados en *C* suponen la cuarta parte de los matriculados en *A*, y la diferencia entre el número de alumnos de *A* y el de alumnos de *B* es inferior en una unidad al doble de matriculados en *C*. Averiguar cuántos niños recibe cada uno de los colegios.
(Solución: En el colegio *A* hay 100 alumnos, 51 en *B* y 25 en *C*.)

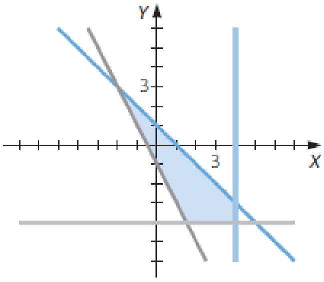
Una empresa ha invertido 73.000 € en la compra de ordenadores portátiles de tres clases *A*, *B* y *C*, cuyos costes por unidad son de 2.400 €, 1.200 € y 1.000 €, respectivamente. Sabiendo que, en total, ha adquirido 55 ordenadores y que la cantidad invertida en los de tipo *A* ha sido la misma que la invertida en los de tipo *B*, averiguar cuántos aparatos ha comprado de cada clase.
(Solución: La empresa ha comprado 10 ordenadores de clase *A*, 20 de clase *B* y 25 de clase *C*.)

3. Transcribir problemas de programación lineal bidimensional al lenguaje algebraico, determinar gráficamente las posibles soluciones y obtener la solución óptima.

3.1 Resolver gráficamente sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y \le 1 \\ -2x-y \le 1 \\ x \le 4 \\ y \ge -4 \end{cases}$.

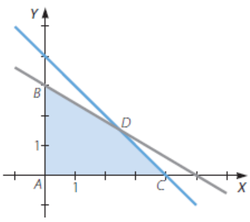
Solución:



Halla las regiones del plano determinadas por los sistemas de inecuaciones, e indica en cada caso si son acotadas o no.

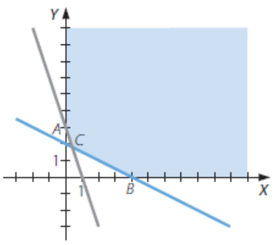
$$a)\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x+5y \le 15 \\ x+y \le 4 \end{cases}$$

Sol: región acotada y tiene como vértices $A(0,0), B(0,3), C(4,0), D(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$



$$\text{b)} \begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x+y \ge 3 \\ x+2y \ge 4 \end{cases}$$

Sol: región no acotada superiormente, tiene como vértices $A(0,3), B(4,0), C(\frac{2}{5},\frac{9}{5})$



3.2 Resolver problemas sencillos de programación lineal (determinar la función objetivo, las restricciones, región factible y encontrar la solución óptima).

En un taller fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0,9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo se necesitan 1,2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estas bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo.

a) Exprese, mediante un sistema de inecuaciones, las restricciones a las que está sometida la producción de los dos modelos de bolsas.

b) Represente la región solución del sistema y halle los vértices.

Una fábrica elabora dos tipos de productos, *A* y *B*. El tipo *A* necesita 2 obreros trabajando un total de 20 horas, y se obtiene un beneficio de 1.500 € por unidad. El tipo *B* necesita 3 obreros con un total de 10 horas y el beneficio es de 1.000 € por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determina la cantidad de unidades de *A* y de *B* que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

Sol:

La región factible está acotada. Vértices: *A* (0, 0); *B* (0, 20); *C* (21, 6) y *D* (24, 0).

Como $f(A) = 0$; $f(B) = 20.000$; $f(C) = 37.500$ y $f(D) = 36.000$, el máximo se alcanza en el vértice *C*. Así, hay que fabricar 21 unidades de tipo *A* y 6 unidades de tipo *B* para que el beneficio sea máximo y valga 37.500 €.

Una compañía aérea tiene dos modelos de avión (A y B) para cubrir tres trayectos diferentes (T_1, T_2 y T_3). El modelo A puede realizar mensualmente 10 veces el trayecto T_1, 30 veces T_2 y 50 veces el T_3. El modelo B puede realizar mensualmente 20 veces cada uno de los trayectos. La compañía se ha comprometido a realizar al menos 80 veces el trayecto T_1, 160 veces el T_2 y 200 veces el T_3.

Si el coste de combustible de los dos modelos es de 200 000 € mensuales, ¿cuánto tiempo debe volar cada uno de estos modelos para que se cumplan los compromisos adquiridos con el mínimo coste?

Sol:

$x \rightarrow$ n.º de meses de actividad del avión *A*

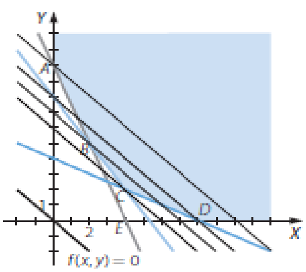
$y \rightarrow$ n.º de meses de actividad del avión *B*

	Avión *A*	Avión *B*	Total	
Trayecto T_1	10	20	80	$\rightarrow 10x + 20y \geq 80$
Trayecto T_2	30	20	160	$\rightarrow 30x + 20y \geq 160$
Trayecto T_3	50	20	200	$\rightarrow 50x + 20y \geq 200$
Coste de combustible (€)	200.000	200.000		$\rightarrow f(x, y) = 200.000x + 200.000y$ $\rightarrow$ Función objetivo

Minimizar $f(x, y) = 200.000x + 200.000y$

Sujeto a
$$\begin{rcases} 10x + 20y \geq 80 \\ 30x + 20y \geq 160 \\ 50x + 20y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{rcases}$$

La región factible no está acotada y tiene como vértices *A*(0, 10); *B*(2, 5); *C*(4, 2) y *D*(8, 0). Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, observamos que el mínimo se alcanza en el vértice *C*. Es decir, para minimizar costes es necesario que el avión del modelo *A* vuele 4 meses y el del modelo *B* vuele 2 meses. El coste de combustible ascenderá a 1.200.000 €.



4. Analizar e interpretar, cualitativa y cuantitativamente, las propiedades locales y globales de funciones que describen situaciones reales en el campo de la economía o de las ciencias sociales.

4.1 Calcular límites de funciones. Indeterminaciones del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\infty-\infty$.

Calcula los siguientes límites:

$$a)\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+3}{x^3}-\frac{1}{x}\right) \qquad b)\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}\right]$$

Calcula los siguientes límites:

$$a)\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{4x^2-4}\ \ (\text{Sol}: \frac{1}{4}) \qquad b)\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}\ (\text{Sol}:1) \qquad c)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^5+2x-6}}{x^3-4x+2}\ \ (\text{Sol}:0)$$

$$d)\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x\ \ (\text{Sol}:\frac{3}{2}) \qquad e)\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\ \ (\text{Sol}:0)$$

4.2 Estudiar la continuidad de una función sencilla en un punto.

Dada la siguiente función estudia la continuidad en el punto x = 1.

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x-1}$$

4.3 Determinar los puntos de discontinuidad de una función, así como el tipo de discontinuidad.

Estudia la continuidad de la siguiente función: $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<0\\ x+1 & \text{si } 0<x<1\\ x^2-2x & \text{si } 1\le x\end{cases}$

Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función aplicando la definición de derivada:

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

4.4 Calcular las asíntotas de una función. (Al menos la horizontal o vertical).

Calcular las asíntotas si las hubiera de la función $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{2x^2+2x-12}$.

Dada la función $g(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x+3}$, determinar sus asíntotas.

5. Utilizar el cálculo de derivadas para resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico y social, interpretando los resultados obtenidos de acuerdo con el contexto del enunciado.

5.1 Calcular la función derivada de funciones elementales o de composición de éstas.

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a)y=\ln\left(x^2+1\right) \qquad b)y=\sqrt{3x^2+6} \qquad c)y=e^{x^3+1} \qquad d)y=\frac{e^x\cdot(x-3)^2}{(x+1)}$$

5.2 Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función derivable.

Dada las siguientes funciones estudia el crecimiento.

$$a)y=\frac{x^2-2x}{x+5} \qquad b)y=2x^3+4x^2+2x \qquad c)y=\sqrt{x^2-4} \qquad d)y=\frac{3x+1}{(x-2)^2}$$

5.3 Determinar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de una función derivable.

5.4 Calcular los máximos y mínimos relativos de una función derivable.

5.5 Calcular los puntos de inflexión de una función derivable.

Hallar el dominio de definición, los máximos y mínimos y los puntos de inflexión de la función $y=x+\sqrt{1-x}$.

Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones.

$$a)f(x)=x^3-6x^2+9x+5 \qquad b)g(x)=\frac{x+2}{x-1}$$

5.6 Resolver problemas de optimización en distintos contextos.

La suma de tres números positivos es 60. El primero, el doble del segundo y el triple del tercero suman 120. Halla los números que cumplen estas condiciones de manera que su producto sea máximo.

Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm3. Averigua las dimensiones de la caja para que su superficie exterior sea mínima.

5.7 Calcular los puntos de corte con los ejes y el dominio de una función.

Sea la función $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{2x^2+2x-12}$. Se pide:

a) Especificar su dominio de definición.
b) Calcula los puntos de corte con los ejes.
c) Estudia el signo.
d) Estudia la continuidad.

5.8 Representar gráficamente funciones polinómicas o racionales sencillas.

Representa las siguientes funciones:

$$a) y = x^4 - 8x^2 + 7 \qquad b) y = \frac{x^3}{1-x^2} \qquad c) y = \frac{x^3+2x}{x^2+1}$$

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$, se pide:

a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Extremos relativos.
b) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.
c) Dibuja la gráfica a partir de los resultados anteriores.

Representa la función $f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$ estudiando previamente:

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.
b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y extremos relativos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ calcula el dominio, asíntotas y estudia el crecimiento.

5.9 Resolver los ejercicios propios de las ciencias sociales que conlleven el estudio, la representación gráfica o el análisis de la gráfica asociada a la evolución de cierto fenómeno económico o social.

El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función: $P(t) = \dfrac{15+t^2}{(t+1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$.

Calcula:

a) La población inicial.
b) El tamaño de la población a largo plazo.

Sol:

a) $P(0) = 15$ millones de individuos.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15+t^2}{(t+1)^2} = 1$ millón de individuos.

Una empresa ha establecido para sus empleados un incentivo (en cientos de euros) en relación con el valor x (en cientos de euros) de lo vendido por cada uno. Dicho incentivo sigue la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01x & \text{si} \quad 0 \le x \le 100 \\ \dfrac{30x}{2x+2300} & \text{si} \quad x > 100 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$. Indicar si el incentivo recibido por un empleado es sensiblemente distinto si el valor de las ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000€.

b) ¿Cuál es la cantidad máxima que un empleado podría recibir como incentivo si sus ventas fueran muy grandes?

El valor, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t viene dado por $f(t)=9-(t-2)^2,\ \ 0\le t\le 4{,}5$. Deduce en qué valor de t alcanzó su máximo valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo.

6. Interpretar la relación existente entre la integral de una función y el cálculo de áreas planas.

6.1 Calcular integrales inmediatas (no trigonométricas).

Resuelve las siguientes integrales:

$$a)\int\frac{dx}{x-4}\qquad b)\int\frac{dx}{(x-4)^2}\qquad c)\int(x-4)^2dx\qquad d)\int\frac{dx}{(x-4)^3}$$

Sol:

$$a)\ln|x-4|+C\quad b)\frac{-1}{x-4}+C\quad c)\frac{(x-4)^3}{3}+C\quad d)\frac{-1}{2(x-4)^2}+C$$

Resuelve las siguientes integrales:

$$a)\int e^{x-4}dx\qquad b)\int e^{-2x+9}dx\qquad c)\int e^{5x}dx\qquad d)\int\left(3^x-x^3\right)dx$$

Sol:

$$a)e^{x-4}+K\ \ b)\frac{-1}{2}e^{-2x+9}+K\quad c)\frac{1}{5}e^{5x}+K\quad d)\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{x^4}{4}+K$$

Expresa las siguientes integrales de la forma: $\dfrac{dividendo}{divisor}=cociente+\dfrac{resto}{divisor}$

$$a)\int\frac{x^2-5x+4}{x+1}dx\qquad b)\int\frac{x^2+2x+4}{x+1}dx\qquad c)\int\frac{x^3-3x^2+x+1}{x-2}dx$$

Sol:

$$a)\frac{x^2}{2}-6x+10\ln|x+1|+C\quad b)\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x+1|+C\quad c)\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-3\ln|x-2|+C$$

Resuelve las siguientes integrales, sabiendo que son de la forma $\int f^n(x)\cdot f'(x)dx$

$$a)\int\cos x sen^3 x dx\qquad b)\int 2xe^{x^2}dx\qquad c)\int\frac{x}{(x^2+3)^5}dx\qquad d)\int\frac{1}{x}\ln^3 x dx$$

Sol:

$$a)\frac{sen^4 x}{4}+K\quad b)e^{x^2}+K\quad c)\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+3)^{-4}}{-4}+K\quad d)\frac{\ln^4|x|}{4}+\mathrm{K}$$

6.2 Aplicar la regla de Barrow en el cálculo de integrales definidas.

Calcular las siguientes integrales:

$a)\int_{1}^{3}(3x^2+1)dx \qquad b)\int_{0}^{1}e^{5x}dx$

Calcula el área comprendida entre la curva: $y=3x^2$ el eje X y las rectas x = 1 y x = 2.

6.3 Calcular el área bajo funciones positivas mediante la integral definida.

Calcula el área de la región limitada por la curva $y=(x-1)^2(x+1)$ y las rectas $y=0$, $x=1$ y $x=2$.

Calcula el área de la región limitada por la curva $y=\dfrac{x}{x^2-2}$ y las rectas $y=0$, $x=2$ y $x=3$.

7. Asignar e interpretar probabilidades a sucesos elementales, obtenidos de experiencias simples y compuestas (dependientes e independientes), utilizando distintas técnicas.

7.1 Calcular la probabilidad condicionada.

7.2 Asignar probabilidades a sucesos mediante el Teorema de la probabilidad total o Teorema de Bayes.

Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es 2/3. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se riega es de 0,25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

En una caja hay diez bombillas, dos de las cuales son defectuosas. Con el fin de detectarlas vamos probando una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarea finalice exactamente en el tercer intento?

El director de un supermercado ha calculado que la probabilidad de que un cliente compre pan es 0,7; la de que compre chocolate es 0,5; y la de que compre ambas cosas es 0,4. ¿Cuál es la probabilidad de que compre pan o chocolate?

8. Planificar y realizar estudios de una población a partir de una muestra representativa seleccionada mediante técnicas de muestreo estadístico, asignar un nivel de significación e inferir conclusiones sobre la población a la que representa.

8.1 Tipificar una variable normal y calcular probabilidades en la tabla de la *N*(0, 1).

Una prueba consta de 200 preguntas de verdadero o falso, para un sujeto que respondiese al azar ¿Cuál sería la probabilidad de que acertase?

a) 50 preguntas o menos.

b) Más de 50 y menos de 100.

c) Más de 120 preguntas.

Las calificaciones en un examen siguen una distribución Normal de media 5,6 y desviación típica 0,8.

a) ¿Qué proporción de alumnos tendrá puntuaciones inferiores o iguales a 4?

b) ¿Qué proporción de alumnos aprobará?

c) ¿Qué proporción de alumnos obtendrá Notable o Sobresaliente?

Sol:

$$\text{a) } \Pr(X \leq 4) = \Pr\left(Z \leq \frac{4-5{,}6}{0{,}8}\right) = \Pr(Z \leq -2) = 0{,}0228$$

$$\text{b) } \Pr(X > 5) = \Pr\left(Z > \frac{5-5{,}6}{0{,}8}\right) = 1 - \Pr(Z \leq -0{,}75) = 1 - 0{,}2266 = 0{,}7734$$

$$\text{c) } \Pr(X > 7) = \Pr\left(Z > \frac{7-5{,}6}{0{,}8}\right) = 1 - \Pr(Z \leq 1{,}75) = 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$$

8.2 Conocer las distribuciones de la media muestral y de las proporciones.

8.3 Hallar el intervalo de confianza para estimar la proporción poblacional *p* en una *B*(*n*, *p*), a partir del estadístico $\hat{p}$ obtenido de una muestra de tamaño *n* con distintos niveles de confianza.

De una muestra aleatoria de 2100 personas de una población hay 630 que leen un determinado diario. Calcular el intervalo de confianza para la proporción poblacional para un nivel de confianza del 99 %

En una ciudad residen 1250 familias. Se seleccionó una muestra aleatoria de un 20 % de ellas y se les preguntó si disponían de gas ciudad en su vivienda. Sabiendo que todas las familias seleccionadas respondieron y que se obtuvo un total de 75 respuestas afirmativas, se pide:

a) ¿Qué estimación puntual podríamos dar para el porcentaje de familias de esa ciudad que disponen de gas ciudad en su vivienda?

b) ¿Qué error máximo cometeríamos con dicha estimación puntual con un nivel de confianza del 95 %?

8.4 Hallar el intervalo de confianza para la media de una distribución normal de desviación típica conocida.

El tiempo de espera en minutos en una ventanilla se supone aproximado mediante una distribución N(μ, σ) con σ igual a 3 minutos. Se lleva a cabo un muestreo aleatorio simple de 10 individuos *y* se obtiene que la media muestral del tiempo de espera es de 5 minutos. Determinar un intervalo de confianza al 95% para μ.

Un fabricante de bombillas garantiza que el tiempo de duración de las bombillas sigue una normal con media igual a 500 horas y con desviación típica igual a 40 horas.

a) Calcular la probabilidad de que una bombilla elegida al azar dure más de 450 horas.

b) Para verificar la garantía del fabricante, se hizo una prueba con 49 bombillas obteniéndose una media muestral de 492 horas. ¿Podemos aceptar que la media de duración es de 500 horas, con un nivel de confianza del 90%? (intervalo de confianza)

Una muestra aleatoria de 9 terrinas de helado proporciona los siguientes pesos en gramos

88 90 90 86 87 88 91 92 89

Halla un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población, sabiendo que el peso de las terrinas tiene una distribución normal con una desviación típica de 1,8 gramos.

8.5 Calcular, para una muestra de tamaño *n* y un nivel de significación α, el error máximo admisible ó para una muestra de tamaño *n* y un error máximo admisible *E*, el nivel de significación α ó el tamaño mínimo de la muestra para un error máximo admisible *E* y un nivel de significación α.

En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.

a) Halla un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional.

b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?

Un agricultor quiere estimar el peso medio de las naranjas que produce, con un error menor de 10 g, empleando una muestra de 81 naranjas. Sabiendo que la desviación típica poblacional es de 36 g, ¿cuál será el máximo nivel de confianza con que realizará la estimación?

Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95 % de una variable es (6,66, 8,34). Calcula la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo sabiendo que la desviación típica es igual a 3. Explica cada uno de los pasos realizados.

En una ciudad residen 1250 familias. Se seleccionó una muestra aleatoria de un 20 % de ellas y se les preguntó si disponían de gas ciudad en su vivienda. Sabiendo que todas las familias seleccionadas respondieron y que se obtuvo un total de 75 respuestas afirmativas, se pide:

a) ¿Qué estimación puntual podríamos dar para el porcentaje de familias de esa ciudad que disponen de gas ciudad en su vivienda?

b) ¿Qué error máximo cometeríamos con dicha estimación puntual con un nivel de confianza del 95 %?

9. Analizar de forma crítica informes estadísticos presentes en los medios de comunicación y otros ámbitos, y detectar posibles errores y manipulaciones en la presentación de determinados datos.

9.1 Realizar contrastes de hipótesis para la proporción de una binomial o para la media de una normal.**

10. Reconocer el papel de las matemáticas como instrumento para la comprensión de la realidad, lo que las convierte en un parte esencial de nuestra cultura, y aplicar los conocimientos adquiridos a situaciones nuevas, diseñando, utilizando y contrastando distintas estrategias y herramientas matemáticas para su estudio y tratamiento.

10.1* Valorar el interés, la actitud que muestra un alumno en clase y la realización de tareas.

11. Utilizar los recursos tecnológicos en la obtención de información, en su tratamiento y en la exposición de las conclusiones obtenidas.

11.1* Valorar la presentación, análisis y la interpretación de las soluciones en la elaboración de ejercicios de clase.

12. Abordar las tareas propuestas con interés y curiosidad y exponer los procesos de forma clara y ordenada, verificando la validez de las soluciones.

12.1* Valorar la perseverancia, interés, autonomía del alumno en clase.

12.2 Valorar la presentación clara y ordenada de los resultados.

*Los indicadores 10.1, 11.1, 12.1 sólo se podrán evaluar mediante la evaluación continua del alumno. En la prueba extraordinaria no se podrá evaluar.

** El criterio 9 no entrará para examen ya que no se vio con suficiente profundidad.

MÁS EJERCICIOS… (entre paréntesis se indica los mínimos relacionados)

1) Determina la expresión matricial de este sistema, y resuélvelo como si fuera una ecuación matricial. (1.3, 1.4)

$$\begin{cases} -3x+y+2z=0 \\ -x-2y+z=-2 \\ x-y+z=1 \end{cases} \quad \text{(Solución: } A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{11} & \frac{-3}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{-5}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{7}{11} \end{pmatrix},\ x=1, y=1, z=1)$$

2) La función $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ tiene un máximo en el punto (1, 4) y pasa por el punto (3, 0). Halle a, b y c. (2.2, 2.3, 5.4)

3) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=x^3-9x$

Se pide:

a) Calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.
b) Estudia el signo de la función.
c) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función *f* y el eje OX.

(5.1, 5.4, 6.3)

4) Sea la función dependiente de los parámetros a y b : $f(x)=\begin{cases} -2x-a & \text{si } x\le 0 \\ x-1 & \text{si } 0<x\le 2 \\ bx-5 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) Hállense los valores de a y b para que la función sea continua en todos los reales.
b) Represéntese gráficamente para los valores $a=0$ y $b=3$.
c) Para los valores $a=0$ y $b=3$, hállese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=3$.

(4.2, 4.3, 5.8, 6.3)

5) Un estuche contiene 15 lápices de color rojo y 10 de color azul.

a) Si elegimos uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea rojo?
b) Si extraemos dos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean azules?
c) Si elegimos dos, calcular la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo rojo.

(7.1, 7.2)

6) El tipo de interés anual $I(t)$ en %, ofrecido por una entidad financiera depende del tiempo, t en años, que está dispuesto a mantener la inversión a través de la siguiente expresión: $I(t)=\dfrac{90t}{t^2+9}$.

a) Calcular razonadamente cuántos años le conviene pactar a un inversor que trate de optimizar el tipo de interés.
b) Si una inversión se mantuviese a muy largo plazo, ¿el tipo de interés podría llegar a ser negativo?

Solución: (5.1, 5.4, 4.1, 4.2)

Apartado a:

Se trata de determinar un valor de t para el que la función $I(t)=\frac{90t}{t^2+9}$ presente un máximo.

Para ello, derivamos la función y la igualamos a cero:

$$I'(t)=\frac{90\cdot(t^2+9)-90t\cdot 2t}{(t^2+9)^2}=-90\frac{t^2-9}{(t^2+9)^2}=0\rightarrow\{t=-3\},\{t=3\}$$

Para determinar si se trata de máximos, mínimos o puntos de inflexión, analizamos el signo de la segunda derivada:

$$I''(t)=-90\frac{2t\cdot(t^2+9)^2-(t^2-9)\cdot 2(t^2+9)\cdot 2t}{(t^2+9)^4}=180t\frac{t^2-27}{(t^2+9)^3}$$

$I''(-3)=\frac{5}{3}>0\rightarrow$ Mínimo

$I''(3)=\frac{-5}{3}<0\rightarrow$ Máximo

Por lo que el tiempo t óptimo a mantener la inversión es de 3 años. En estas condiciones, el tipo de interés será: $I(3)=\frac{90\cdot 3}{3^2+9}=15\%$

Apartado b:

La función es continua en todo su dominio y a partir de $t=3$ es decreciente; además, no presenta más máximos o mínimos que los calculados. Sin embargo, como $\lim_{t\to\infty}I(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{90t}{t^2+9}=0$ presenta una asíntota horizontal $I(t)=0$; por ello, el interés irá disminuyendo paulatinamente, pero no alcanzará nunca valores negativos.

7) Una asociación de vecinos está organizando una excursión en autobús a la que acudirán 400 personas del barrio. Contactan con una empresa de autobuses que dispone de 8 autobuses normales (40 plazas) y de 10 autobuses grandes (50 plazas). El alquiler de cada autobús normal cuesta 600 € mientras que el alquiler de cada autobús grande cuesta 800 €. Por otra parte, la empresa únicamente dispone de 9 conductores libres en las fechas en que se pretende realizar el viaje. ¿Cuántos autobuses de cada tipo habrá que contratar para que el coste del viaje sea mínimo? ¿Cuál será este coste?

Sol: (3.1, 3.2)

Sea: $\left|\begin{array}{l}\text{x = nº autobuses normales}\\ \text{y = nº autobuses grandes}\end{array}\right.$ $\quad\left\{\begin{array}{l}600x+800y\\ 40x+50y\geq 400\\ x\leq 8\\ y\leq 10\\ x+y\leq 9\\ x\geq 0\\ y\geq 0\end{array}\right.\rightarrow$

$\rightarrow\{x=5,y=4\}$; Coste: 6200 €

8) En un grupo de personas, al 50% les han puesto alguna vez una multa de tráfico. Por otro lado, al 12,5% no les han puesto nunca una multa pero sí han sufrido alguna vez un accidente. Finalmente, al 60% de quienes nunca han tenido un accidente no les han puesto nunca una multa.

   a) ¿Qué porcentaje no han tenido nunca un accidente ni les han puesto una multa?
   b) ¿Qué porcentaje no han tenido nunca un accidente?
   c) Entre las personas que nunca han tenido una multa, ¿qué porcentaje no han tenido nunca un accidente?

Sol: (7.1, 7.2)

Representamos la situación mediante una tabla de doble entrada:

	Accidente Si	Accidente No	
Multa Si	25	25	50
Multa No	12.5	37.5	50
	37.5	62.5	100

$0.6x = 37.5 \longrightarrow \{x = 62.5\}$

Apartado a:

Un 37.5% no ha tenido nunca un accidente ni se le ha puesto una multa.

Apartado b:

Un 62.5% no ha tenido nunca un accidente.

Apartado c:

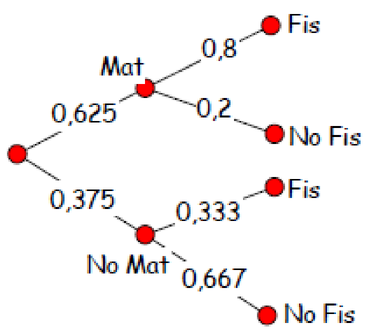
$P\left(\bar{A}/\bar{M}\right) = \frac{P\left(\bar{A}\wedge\bar{M}\right)}{P\left(\bar{M}\right)} = \frac{12.5}{50} = 0.25$

De entre los que no han tenido nunca una multa, un 25% tampoco ha tenido nunca un accidente.

9) En cierto curso de un centro de enseñanza el 62,5% de los alumnos aprobaron matemáticas. Por otro lado, entre quienes aprobaron matemáticas, el 80% aprobó también física. Se sabe igualmente que sólo el 33,3% de quienes no aprobaron matemáticas aprobaron física.

   a) ¿Qué porcentaje consiguió aprobar ambas asignaturas a la vez?
   b) ¿Cuál fue el porcentaje de aprobados en la asignatura de física?
   c) Si un estudiante no aprobó física, ¿qué probabilidad hay de que aprobara matemáticas?

Sol: (7.1, 7.2)



Apartado a:
$P(Mat \wedge Fis) = P(Mat) \cdot P(Fis/Mat) = 0.625 \cdot 0.8 = 0.5 \rightarrow 50\%$
Apartado b:
$P(Fis) = P(Mat \wedge Fis) + P(No\ Mat \wedge Fis) =$
$= 0.625 \cdot 0.8 + 0.375 \cdot 0.333 = 0.6248 \rightarrow 62.48\%$
Apartado c:
$P(Mat/No\ Fis) = \frac{P(Mat\ \wedge\ NoFis)}{P(No\ Fis)} = \frac{0.625 \cdot 0.2}{0.625 \cdot 0.2 + 0.375 \cdot 0.667} = 0.333$

10) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 4x+12 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $x = 1$.
b) Estudie la continuidad en $x = -1$.
c) Estudie el crecimiento y la curvatura.
d) Realice la gráfica de la función.
e) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

(4.2, 5.2, 5.3, 5.8, 6.3)