11.10. EJERCICIOS

1. Calcular las integrales inmediatas:

1. $-\int x^4\,dx$	2. $-\int (x^3+2x-1)\,dx$	3. $-\int \frac{-5}{3x}\,dx$
4. $-\int \left(3x^{\frac{-1}{3}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$	5. $-\int \left(3x^4-2x+\frac{1}{x}\right)\,dx$	6. $-\int (\cos x+\operatorname{sen} x)\,dx$
7. $-\int (x+1)^2\,dx$	8. $-\int \frac{1}{2}e^x\,dx$	9. $-\int \left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)\,dx$
10. $-\int \frac{x^3+5x^2-x+4}{x}\,dx$	11. $-\int (10^x-5)\,dx$	12. $-\int \sqrt[6]{x}\,dx$
13. $-\int \frac{1}{x-7}\,dx$	14. $-\int e^{3x}\,dx$	15. $-\int \frac{4}{1-x}\,dx$
16. $-\int (2x+5)^{2002}\,dx$	17. $-\int (4x^3+2\cos x)\,dx$	18. $-\int \frac{1}{x^3}\,dx$
19. $-\int e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x\,dx$	20. $-\int x\cos(3x^2-5)\,dx$	21. $-\int (2x^2+3)^5\cdot x\,dx$
22. $-\int \frac{1}{(x-2)^3}\,dx$	23. $-\int \operatorname{sen}\,(4x)\,dx$	24. $-\int \frac{3x}{5x^2+1}\,dx$
25. $-\int (1-3x)^6\,dx$	26. $-\int \left(\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x\right)\,dx$	27. $-\int (x^3+1)^6x^2\,dx$
28. $-\int 3xe^{2x^2-1}\,dx$	29. $-\int \frac{\ln x}{x}\,dx$	30. $-\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$
31. $-\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\,dx$	32. $-\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$	33. $-\int (x^5-9x^3+\pi^2+x)\,dx$
34. $-\int 7^{2x}\,dx$	35. $-\int (2-x)^{30}\,dx$	36. $-\int \frac{1}{x}\cos(\ln(x^3))\,dx$
37. $-\int x^2e^{x^3}\,dx$	38. $-\int 1654\sqrt{2x+1}\,dx$	39. $-\int \frac{dx}{x\ln x}$
40. $-\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}$		

2. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x<-1 \\ -x^2+1 & si \quad -1\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) Representarla. ¿En qué puntos es continua?

b) Calcular el área encerrada por la curva, el eje Ox y las rectas $x=2$ y $x=-2$.

3. La función de coste marginal de un producto viene dado por $c(x)=0'2x+3$ y la de ingreso marginal por $i(x)=25-0'6x$.

Calcular la función de beneficios de la empresa, sabiendo que $C(0) = 1004$ e $I(0) = 0$, siendo $C(x)$ e $I(x)$ las funciones de costes e ingresos respectivamente.

4. A las nueve de la mañana surge un rumor en una ciudad que se difundea un ritmo de $e^{2t} + 1000$ personas/hora. Sabiendo que t representa el número de horas transcurridas desde la aparición del rumor, calcular el número de personas que lo habrán oído entre las diez y las doce de la mañana.

5. Calcula la función $f(x)$ sabiendo que:

$$f'(x) = 20x^3 - 12x$$

y $f(0) = 7$.

6. Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3 - 2x$, se pide:

a) Representarlas gráficamente en los mismos ejes y calcular el área encerrada por ambas.

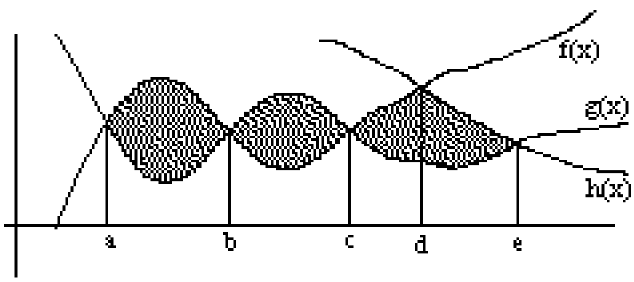
b) Calcular la primitiva de la función $f(x) \cdot g(x)$ que pasa por $(-1, 7)$.

7. Calcula la función $f(x)$ sabiendo que:

$$f'(x) = 2x - 4$$

y que tiene un mínimo en $(2, 5)$.

8. Expresa mediante integrales el área del recinto sombreado en la figura:



9. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & si \quad x \leq 0 \\ x - 1 & si \quad 0 < x \leq 2 \\ bx - 5 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Calcular los valores de a y b que hacen la función continua en todos los números reales.

b) Representar gráficamente la función cuando $a = 0$ y $b = 3$.

c) Para estos mismos valores de a y b, calcular el área de la región plana limitada por $f(x)$, el eje Ox y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

10. Calcular el área comprendida bajo la curva $f(x) = \dfrac{ln\ x}{x}$ entre los valores $x = 1$ y $x = e$.

11. Explíquese por qué es: $\displaystyle\int_1^7 \frac{1}{x}dx = ln\ 7$.

12. Resolver la integral: $\displaystyle\int_2^3 3e^{-2x}dx$.

13. Calcule el área de la región finita comprendida entre el eje Ox y la gráfica de la función

$$f(x) = 12x - x^2$$

Realice un esbozo gráfico.

14. Calcular dos primitivas diferentes de la función $g(x) = x \cdot cos\ (x^2 + 2)$.

15. Un punto se mueve en línea recta con una velocidad dada por la fórmula $v(t) = 12t - 5\ \left(\frac{m}{s}\right)$. Calcúlese el espacio recorrido $s(t)$ en cada instante t sabiendo que $s(0) = 10$ m. ¿Cuál es la velocidad media entre $t = 0$ seg y $t = 2$ seg.

16. Calcular la función primitiva de $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ que en $x = 0$ toma el valor 1.

17. Calcular el área encerrada por la parábola $f(x) = \dfrac{-1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}$ y las rectas $3x - 2y - 13 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$ e $y = 0$.

18. Calcular usando integrales el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 2 y 4 metros.

19. Encontrar todas las funciones polinómicas de grado 3 cuya derivada segunda sea $f''(x) = x - 1$. Encontrar, entre ellas, aquella o aquellas que tengan un mínimo relativo en el punto $\left(4, \dfrac{-1}{3}\right)$.

20. Representar gráficamente $f(x) = (x-1)^3$ y calcular:

$$\int_{-1}^{3} (x-1)^3 dx$$

¿Cómo interpretarías el resultado de esta integral geométricamente?

21. Calcular el área limitada por la curva $g(x) = sen\ x$, el eje Ox y las rectas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$.

22. Calcular la primitiva de $h(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x}$ que se anula para $x = 1$.

23. La penetración de un producto cosmético en el mercado crece exponencialmente de manera que la cantidad de gramos vendida diariamente en un establecimiento responde a la función:

$$f(t) = 10e^{\frac{t}{100}}$$

en la que t es el tiempo en días. El total de gramos vendidos en los 100 primeros días es, aproximadamente:

$$\int_{0}^{100} f(t)dt$$

Calcúlese ese valor.

24. Calcule el área del recinto limitado por la recta $x = 0$, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y el eje x. Realice un esbozo gráfico.

25. Considérese la curva de ecuación $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, así como su tangente en el origen. Hallar el área de la región acotada del plano que queda encerrada entre la curva y la tangente.

26. Hallar el área de la región determinada por la función $f(x) = sen\ \ x$, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x = \dfrac{\pi}{4}$ y $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

27. a) Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de una misma función, ¿qué relación existe entre ellas? Justifíquese.

    b) Hallar primitivas de la función $f(x) = sen^2x \cdot cos\ x$.

28. Dada la función $f(x) = 4x^3 + 10x + 8$, se pide:

    a) Calcular una primitiva $F(x)$ que cumpla que $F(1) = 20$.

    b) Enunciar la regla de Barrow y aplicarla para calcular la integral de la función $f(x)$ en el intervalo [1,2].

29. a) Realizar un estudio completo de la función $f(x) = 3x^2 - x^3$.

    b) Hallar la primitiva de la función anterior que pasa por (1,1).

30. La velocidad $v(t)$ de un cohete t segundos después del despegue viene dada por

$$v(t) = 0'3t^2 + 4t \quad \frac{m}{s}$$

    a) Determinar la distancia que recorre el cohete entre los instantes 6 y 7 segundos.

    b) Representar la función $v(t)$ e interpretar geométricamente el apartado anterior.

31. a) Representar la curva $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.

    b) Determina el área comprendida entre las dos gráficas anteriores.

32. Hallar el área comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3 - 2x$.

33. Hallar el área de la figura comprendida entre la curva $y = x^3$, la recta $x = 2$ y el eje de abscisas.

34. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x}$. Determinar:

    a) Su dominio, asíntotas y situación de la curva respecto a ellas.

    b) Extremos y monotonía.

    c) Área encerrada por la curva, la asíntota correspondiente y las rectas $x = k$ y $x = 2k$, siendo k el punto en el que la función tiene un máximo relativo.

35. Un publicista diseña un panel publicitario que tiene la siguiente forma: base horizontal de 10 metros de longitud y resto del contorno limitado por la función:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ -x + 10 & \text{si } 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

    a) Dibujar la gráfica del recinto correspondiente a dicho cartel.

    b) Calcular su superficie.

36. a) Di si puede haber dos funciones con la misma derivada. Demuéstralo en caso negativo y en caso afirmativo, pon un ejemplo.

    b) Determina la función $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto (2,4) y que su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{x^4} + 2x$$

37. Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = 2x^3 - 2x$ y el eje de abscisas.

38. Una empresa estima que la tasa de variación de gastos de mantenimiento de sus equipos informáticos viene dada por la función:

$$m(t) = 10 + 10t + 4t^2$$

donde t se mide en años, y $m(t)$ en cientos de €/año. Se pide:

a) Dibujar la gráfica y hacer una interpretación de ella.

b) Hallar el área encerrada entre la curva anterior y el eje de abscisas entre los valores $t = 0$ y $t = 5$. ¿Qué representa el resultado?

39. ¿Cuál es la expresión matemática de una función $f(x)$ de la que se sabe que al derivarla dos veces se obtiene una constante distinta de 0?

40. Calcular el área limitada por la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$.

41. Sean las funciones:

$$\begin{cases} y = x^3 - 4x^2 + 4x \\ y = -3x^2 + 6x \end{cases}$$

Determinar:

a) Sus puntos de corte con los ejes.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Los extremos relativos.

d) El área que encierran.

42. Calcula, dibujando previamente la región, el área limitada por la función $y = -x^2 + 5x - 6$ y el eje x.

43. La curva $f(x) = a[(1 - (x - 2)^2]$, con $a > 0$, delimita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a.

44. Dadas las funciones $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$, represéntalas gráficamente y halla el área de la superficie que encierran.

45. Determina el área de una chapa cuya forma coincide con la limitada por la gráfica de la función $y = 4 - x^2$ y el eje x.

46. Hallar el área del triángulo mixtilíneo de vértices $A = (2, 4)$, $B = (-2, 4)$ y $C = (-1, 1)$, en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la de ecuación $y = x^2$.

47. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde b es un parámetro real. Se pide:

a) Calcular el valor del parámetro b para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$.

b) Calcular el área del recinto plano limitado por la función anterior, los ejes coordenados y la recta $x = 2$.